Элементарные функции. Замечательные пределы. Равномерная непрерывность

Определение 1. *Функция $y = f(x)$ называется* **четной**, *если из того, что существует $f(x)$, следует, что существует и $f(-x)$ и $f(-x) = f(x)$. Функция $y = f(x)$ называется* **нечетной**, *если из того, что существует $f(x)$, следует, что существует и $f(-x)$ и $f(-x) = -f(x)$.*

Определение 2. *Функция $y = f(x)$ называется* **периодической**, *если существует такое вещественное число $T \neq 0$, что $f(x+T) = f(x)$ для любой точки x из области определения. Наименьшее из чисел $T > 0$, удовлетворяющее этому условию, называется* **(основным) периодом** *функции $f(x)$.*

Показательная функция.

Пусть m — натуральное число. Тогда:

1) Положим по определению $x^m = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{m\,\text{раз}}$. Функция $f(x) = x^m$ непрерывна на промежутке $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, так как

$$\lim_{x\to a} x^m = \underbrace{(\lim_{x\to a} x) \cdot \dots \cdot (\lim_{x\to a} x)}_{m\,\text{раз}} = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{m\,\text{раз}} = a^m,$$

и возрастает на $\mathbb{R}+$, поскольку при $0 \leqslant x_1 < x_2$ справедливо неравенство $x_2^m - x_1^m = (x_2 - x_1)(x_2^{m-1} + x_2^{m-2} \cdot x_1 + \dots + x_1^{m-1}) > 0$.

2) По теореме об обратной функции существует функция $g(x) = x^{1/m}$, которая также непрерывна и возрастает на $\mathbb{R}_+$.

3) Положим по определению $x^{-m} = \underbrace{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \dots \cdot \frac{1}{x}}_{m\,\text{раз}}$. Функция $f(x) = x^{-m}$ непрерывна на промежутке $(0, +\infty)$, так как $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{x^m} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to a} x^m} = \frac{1}{a^m}$, и убывает на $(0, +\infty)$, поскольку при $0 < x_1 < x_2$ справедливо неравенство $\frac{1}{x_1^m} - \frac{1}{x_2^m} = \frac{x_2^m - x_1^m}{x_1^m \cdot x_2^m} > 0$.

4) Пусть $x > 0$ — произвольное вещественное число, m — натуральное, n — целое. Обозначим $y = x^{1/m}$, $z = (x^n)^{1/m}$. Тогда

$$y^m = x \Rightarrow y^{mn} = x^n = z^m \Rightarrow (y^n)^m = z^m \Rightarrow y^n = z.$$

Значит, $(x^{1/m})^n = (x^n)^{1/m}$. Положим по определению $x^{\frac{n}{m}} = (x^{1/m})^n = (x^n)^{1/m}$.

Свойства степени с рациональным показателем.

Введем обозначения: $r = \frac{a}{b}$, $r_1 = \frac{a_1}{b_1}$, где a, a_1 — целые числа, b, b_1 — натуральные; $d = x^{\frac{1}{bb_1}}$, $x > 0$ — вещественное.

1. $x^r \cdot x^{r_1} = x^{r+r_1}$, так как

$$x^r \cdot x^{r_1} = x^{\frac{ab_1}{bb_1}} \cdot x^{\frac{a_1 b}{b_1 b}} = d^{ab_1} \cdot b^{a_1 b} = d^{ab_1 + a_1 b} = x^{\frac{ab_1 + a_1 b}{bb_1}} = x^{r+r_1}.$$

2. $(x^r)^{r_1} = x^{rr_1}$, так как

$$(x^r)^{r_1} = \left(x^{\frac{ab_1}{bb_1}}\right)^{\frac{a_1}{b_1}} = \left(d^{ab_1}\right)^{\frac{a_1}{b_1}} = \left(\left(d^{ab_1}\right)^{\frac{1}{b_1}}\right)^{a_1} = (d^a)^{a_1} = d^{aa_1} = x^{\frac{aa_1}{bb_1}} = x^{rr_1}.$$

3. Если $x > 1$, $r > r_1$, то $x^r > x^{r_1}$, так как

$$d > 1, ab_1 > a_1 b \Rightarrow d^{ab_1} > d^{a_1 b} \Rightarrow x^{\frac{ab_1}{bb_1}} > x^{\frac{a_1 b}{b_1 b}} \Rightarrow x^r > x^{r_1}.$$

5) Положим $x = e$. Поскольку для любого натурального n справедливы неравенства $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$, то

а) $1 + \dfrac{1}{n} < e^{\frac{1}{n}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$;

б) $e^{\frac{1}{n+1}} < 1 + \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{1 - 1/(n+1)}$, следовательно, $e^{-\frac{1}{n+1}} > 1 - \dfrac{1}{n+1}$. Обозначим $-(n+1) = k$, получим, что $e^{\frac{1}{k}} > 1 + \dfrac{1}{k}$, где $k = -1, -2, -3, \ldots$ (при $k = -1$ получаем $e^{-1} > 0 = 1 + \dfrac{1}{-1}$ — очевидно).

Из пунктов а), б) следует, что

$$e^{\frac{1}{n}} > 1 + \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad n \neq 0. \tag{1}$$

Пусть теперь $r = \dfrac{m}{n}$, где m — натуральное число или 0, а n — целое, не равное 0. Тогда

$$e^r = \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^m > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^m \geqslant 1 + \frac{m}{n} = 1 + r.$$

При выводе последнего соотношения мы воспользовались оценкой (1) и неравенством Бернулли. Предположим теперь, что $0 < r < 1$, тогда $e^{-r} > 1 - r$, следовательно, $e^r < \dfrac{1}{1-r} = 1 + \dfrac{r}{1-r}$, то есть

$$e^r < 1 + \frac{r}{1-r} \quad \forall r \in \mathbb{Q}, \quad 0 < r < 1. \tag{2}$$

Определим теперь показательную функцию e^α для произвольного показателя $\alpha \in \mathbb{R}$. Пусть $M_1 = \{e^r \,|\, r \leqslant \alpha,\, r \in \mathbb{Q}\}$, $M_2 = \{e^r \,|\, r \geqslant \alpha,\, r \in \mathbb{Q}\}$. Тогда множество M_1 не пусто и ограничено сверху (например, числом $e^{[\alpha]+1}$); множество M_2 также не пусто и ограничено снизу (например, числом $e^{[\alpha]}$). Обозначим $\gamma_1 = \sup M_1$, $\gamma_2 = \inf M_2$.

Если некоторое рациональное число $r \geqslant \alpha$, то $e^r \geqslant \gamma_1$ (так как e^r — какая-то из верхних граней множества M_1, γ_1 — его точная верхняя грань). Значит, любой элемент множества

M_2 больше или равен числа γ_1, следовательно, точная нижняя грань этого множества $\gamma_2 \geqslant \gamma_1$. Покажем, что $\gamma_1 = \gamma_2$.Выберем рациональное число δ, $0 < \delta < 1$. Тогда найдутся такие рациональные числа r_1, r_2, что $[\alpha] \leqslant r_1 \leqslant \alpha \leqslant r_2 \leqslant [\alpha]+1$, $r_2 - r_1 < \delta$ (свойства вещественных чисел). Значит,

$$e^{[\alpha]} \leqslant e^{r_1} \leqslant \gamma_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant e^{r_2} \leqslant e^{[\alpha]+1}.$$

Отсюда получаем, что

$$0 \leqslant \gamma_2 - \gamma_1 \leqslant e^{r_2} - e^{r_1} = e^{r_1}\left(e^{r_2-r_1}-1\right) \leqslant e^{[\alpha]+1}\left(e^{r_2-r_1}-1\right) \leqslant e^{[\alpha]+1}\frac{r_2-r_1}{1-(r_2-r_1)} < e^{[\alpha]+1}\frac{\delta}{1-\delta} \tag{3}$$

(мы воспользовались неравенством (2)).

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно. Положим $\delta = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon + e^{[\alpha]+1}}$. Тогда $0 < \delta < 1$ и из (3) следует, что $0 \leqslant \gamma_2 - \gamma_1 < \varepsilon$. В силу произвольности выбора ε отсюда заключаем, что $\gamma_1 = \gamma_2$. Обозначим $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2$ и положим по определению $e^\alpha = \gamma$. Заметим еще, что если $\alpha = \dfrac{m}{n}$ — рациональное число, то $\sup M_1 = \inf M_2 = e^{\frac{m}{n}}$, то есть наше определение корректно (совпадает с введенным ранее определением степени с рациональным показателем).

Отметим некоторые свойства степени с вещественным показателем:

а) если $\alpha < \beta$, то $e^\alpha < e^\beta$. Покажем это. Из свойств вещественных чисел мы знаем, что если $\alpha < \beta$, то найдутся такие рациональные числа r_1, r_2, что $\alpha < r_1 < r_2 < \beta$ и, следовательно, $e^\alpha \leqslant e^{r_1} < e^{r_2} \leqslant e^\beta$ (строгое неравенство здесь следует из соответствующего свойства степени с рациональным показателем, нестрогие — из определения e^α и e^β).

б) Для любых вещественных чисел α и β справедливо соотношение: $e^\alpha \cdot e^\beta = e^{\alpha+\beta}$. Действительно, пусть ε — положительное рациональное число. Положим $\delta = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon + e^{[\alpha]+[\beta]+2}}$. Тогда $0 < \delta < 1$ и найдутся такие рациональные числа r_1', r_2', r_1'', r_2'', что $r_1' < \alpha < r_1'' < [\alpha]+1$, $r_1'' - r_1' < \dfrac{\delta}{2}$; $r_2' < \beta < r_2'' < [\beta]+1$, $r_2'' - r_2' < \dfrac{\delta}{2}$. Обозначим $r' = r_1' + r_2'$, $r'' = r_1'' + r_2''$. Тогда $r' < \alpha + \beta < r''$, $r'' - r' < \delta$, причем $r'' < [\alpha] + [\beta] + 2$. Отсюда

$$e^{r'} < e^{\alpha+\beta} < e^{r''} < e^{[\alpha]+[\beta]+2}$$

и

$$e^{r'} = e^{r_1'+r_2'} = e^{r_1'} \cdot e^{r_2'} < e^\alpha \cdot e^\beta < e^{r_1''} \cdot e^{r_2''} = e^{r_1''+r_2''} = e^{r''}.$$

Значит,

$$|e^{\alpha+\beta} - e^\alpha \cdot e^\beta| < e^{r''} - e^{r'} = e^{r'}\left(e^{r''-r'}-1\right) < e^{[\alpha]+[\beta]+2}\left(e^{r''-r'}-1\right) < e^{[\alpha]+[\beta]+2}\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right) = \varepsilon$$

(здесь мы опять воспользовались неравенством (2)). В силу произвольности выбора ε получаем, что $e^{\alpha+\beta} = e^\alpha \cdot e^\beta$.

в) Пусть α_0 — произвольное вещественное число. Тогда для любого рационального $\varepsilon > 0$ найдется такое вещественное $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех чисел $\alpha \in B_\delta(\alpha_0)$ будет выполнено: $|e^\alpha - e^{\alpha_0}| < \varepsilon$. Проверим это. Положим $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2(\varepsilon + e^{[\alpha_0]+2})}$; тогда $0 < \delta < 1$. Пусть α —

вещественное число, такое, что $0 < \alpha - \alpha_0 < \delta$. Тогда найдутся такие рациональные числа r_1, r_2, что $r_1 < \alpha_0 < \alpha < r_2 < [\alpha_0] + 2$, $r_2 - r_1 < 2\delta$. Тогда

$$e^{r_1} < e^{\alpha_0} < e^{\alpha} < e^{r_2} < e^{[\alpha_0]+2},$$

следовательно,

$$0 < e^{\alpha} - e^{\alpha_0} < e^{r_2} - e^{r_1} = e^{r_1}\left(e^{r_2-r_1} - 1\right) < e^{[\alpha_0]+2}\left(e^{r_2-r_1} - 1\right) < e^{[\alpha_0]+2}\frac{2\delta}{1-2\delta} = \varepsilon$$

(снова воспользовались оценкой (2)). Совершенно аналогичные рассуждения можно провести для случая $0 < \alpha_0 - \alpha < \delta$.

Подытожим доказанные выше свойства:

Теорема 1. *Показательная функция* $y = f(x) = e^x$ *обладает следующими свойствами:*

1) область определения — вся числовая ось;

2) функция возрастает на области определения;

3) функция непрерывна на области определения;

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$;

5) множество значений — промежуток $(0, +\infty)$.

Доказательство. Утверждение пункта 1) следует из определения степени с произвольным вещественным показателем и из свойства а); утверждение пункта 2) — из свойства а); утверждение пункта 3) — из свойства в).

Проверим утверждение пункта 4). Пусть n — произвольное натуральное число; x — вещественное число; $x > n$. Тогда

$$e^x > e^n = (1 + e - 1)^n \geqslant 1 + n(e-1)$$

(применили неравенство Бернулли). Так как $\lim\limits_{n\to+\infty}(1 + n(e-1)) = +\infty$, то, переходя к неравенству в пределе, получаем, что $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. Пусть теперь n — произвольное натуральное число; x — вещественное число; $x < -n$. Тогда

$$0 < e^x < e^{-n} = \frac{1}{e^n} = \frac{1}{(1+e-1)^n} \leqslant \frac{1}{1+n(e-1)}.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+n(e-1)} = 0$, то получаем, что $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

Докажем утверждение пункта 5). Пусть $y > 0$ — произвольное вещественное число. Так как $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, то найдется такое вещественное число b, что $e^b > y$. С другой стороны, поскольку $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, то найдется такое вещественное число a, что $0 < e^a < y$. В силу доказанного выше e^x — непрерывная монотонная на сегменте $[a, b]$ функция, значит, она принимает все промежуточные значения между e^a и e^b. Следовательно, существует вещественное число c такое, что $e^c = y$. В силу произвольности выбора положительного значения y заключаем, что множеством значений функции e^x является весь промежуток $(0, +\infty)$. $\square$

Логарифмическая функция.

1) Функция $y = \ln x$ — обратная к функции $x = e^y$. Из свойств функции e^y и теоремы об обратной функции следует, что она возрастает и непрерывна на промежутке $(0, +\infty)$.

2) Пусть $a > 0$, $a \neq 1$. Для произвольного вещественного числа y положим по определению $a^y = e^{y \ln a}$. Тогда функция $x = a^y$ определена на всей числовой оси; непрерывна (как композиция непрерывных функций); возрастает при $a > 1$, убывает при $0 < a < 1$ (проверяется непосредственно).

3) `Логарифмическая функция` $y = f(x) = \log_a x$ — обратная к функции $x = a^y$. Из свойств функции a^y и теоремы об обратной функции следует, что область определения логарифмической функции — промежуток $(0, +\infty)$; множество значений — вся числовая ось; функция непрерывна на области определения; возрастает при $a > 1$, убывает при $0 < a < 1$.

Степенная функция.

Пусть α — произвольное вещественное число, $\alpha \neq 0$. `Степенная функция` $y = f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$. Область определения — промежуток $(0, +\infty)$; множество значений — промежуток $(0, +\infty)$; непрерывна на области определения (как композиция непрерывных функций); возрастает при $\alpha > 0$, убывает при $\alpha < 0$ (проверяется непосредственно).

Тригонометрические функции.

К тригонометрическим функциям относятся функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$. Определения и основные свойства этих функций известны из школьной программы. Хотя такие определения не являются совершенно строгими, поскольку опираются на геометрические соображения, мы будем пользоваться ими. Для того, чтобы определить строго, скажем, функцию $\sin x$, нужны сведения из теории рядов или дифференциальных уравнений, которыми мы пока не обладаем. Впрочем, известных нам определений будет пока вполне достаточно. Напомним основные свойства тригонометрических функций (без доказательства).

Функция $y = \sin x$ определена на всей числовой оси; множество значений — отрезок $[-1, 1]$; периодическая с периодом $2\pi n$; возрастает на промежутках $\left[-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, убывает на промежутках $\left[\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$; нечетная.

Функция $y = \cos x$ определена на всей числовой оси; множество значений — отрезок $[-1, 1]$; периодическая с периодом $2\pi n$; возрастает на промежутках $[\pi + 2\pi n, 2\pi + 2\pi n]$, убывает на промежутках $[2\pi n, \pi + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$; четная.

Функция $y = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ определена на всей числовой оси за исключением точек $\dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; множество значений — вся числовая ось; периодическая с периодом πn; возрастает на промежутках $\left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi n, \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$; нечетная.

Функция $y = \operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ определена на всей числовой оси за исключением точек πn, $n \in \mathbb{Z}$; множество значений — вся числовая ось; периодическая с периодом πn; убывает на промежутках $(\pi n, \pi + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$; нечетная.

Докажем теперь, что каждая из тригонометрических функций является непрерывной на области своего определения. Рассмотрим функцию $y = \sin x$.

Лемма 1. *Для любого вещественного значения x справедливо неравенство $|\sin x| \leqslant |x|$.*

Доказательство. Доказательство проведем, опираясь на геометрические соображения. При $x = 0$ неравенство очевидно. Пусть $0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$. Рассмотрим окружность единичного радиуса с центром в начале координат — точке O. Пусть X — точка пересечения окружности и оси Ox; точка A принадлежит первой координатной четверти и лежит на окружности так, что $\angle AOX = x$; точка B принадлежит четвертой координатной четверти и лежит на окружности так, что $\angle AOX = \angle BOX$. Тогда дуга окружности AB имеет длину $2x$; длина отрезка AB равна $2\sin x$. Так как длина хорды окружности не превосходит длины соответствующей дуги, то можем утверждать, что в случае $0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$ выполнено: $|\sin x| \leqslant |x|$.

Если $|x| \geqslant \dfrac{\pi}{2}$, то утверждение леммы следует из цепочки неравенств $|\sin x| \leqslant 1 < \dfrac{\pi}{2} \leqslant |x|$. □

Выберем теперь произвольную точку x_0 на числовой оси. Получаем, что для любого вещественного $\varepsilon > 0$ существует значение $\delta = \varepsilon$, такое, что при всех $x \in B_\delta(x_0)$ выполнено:

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\cos\frac{x + x_0}{2}\right| \cdot \left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right| \leqslant 2\left|\frac{x - x_0}{2}\right| < 2 \cdot \frac{\delta}{2} = \varepsilon.$$

Это означает, что функция $y = \sin x$ непрерывна на всей числовой оси.

Непрерывность функции $y = \cos x$ на всей числовой оси следует из аналогичных рассуждений и цепочки неравенств

$$|\cos x - \cos x_0| = 2\left|\sin\frac{x + x_0}{2}\right| \cdot \left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right| \leqslant 2\left|\frac{x - x_0}{2}\right| < 2 \cdot \frac{\delta}{2} = \varepsilon.$$

Функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ непрерывны на областях своего определения как частное непрерывных функций.

Обратные тригонометрические функции.

Функция `арксинус`: $y = f(x) = \arcsin x$ — обратная к функции $x = \sin y$ на сегменте $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$; область определения — сегмент $[-1, 1]$; множество значений — сегмент $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$; возрастает и непрерывна на области определения (по теореме об обратной функции); нечетная.

Функция `арккосинус`: $y = f(x) = \arccos x$ — обратная к функции $x = \cos y$ на сегменте $[0, \pi]$; область определения — сегмент $[-1, 1]$; множество значений — сегмент $[0, \pi]$; убывает и непрерывна на области определения (по теореме об обратной функции).

Функция `арктангенс`: $y = f(x) = \operatorname{arctg} x$ — обратная к функции $x = \operatorname{tg} y$ на интервале $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$; область определения — вся числовая ось; множество значений — интервал

$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; возрастает и непрерывна на области определения (по теореме об обратной функции); нечетная.

Функция арккотангенс: $y = f(x) = \operatorname{arcctg} x$ — обратная к функции $x = \operatorname{ctg} y$ на интервале $(0, \pi)$; область определения — вся числовая ось; множество значений — интервал $(0, \pi)$; убывает и непрерывна на области определения (по теореме об обратной функции).

Определение 3. *Функции: C (постоянная), a^x, $\log_a x$, x^α, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ называются **простейшими элементарными функциями**.*

Гиперболические функции.

Функция синус гиперболический: $y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Область определения — вся числовая ось; множество значений — вся числовая ось; возрастает на области определения; непрерывна на области определения; нечетная.

Функция косинус гиперболический: $y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Область определения — вся числовая ось; множество значений — промежуток $[1, +\infty)$; убывает на промежутке $(-\infty, 0]$, возрастает на промежутке $[0, +\infty)$; непрерывна на области определения; четная.

Функция тангенс гиперболический: $y = \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Область определения — вся числовая ось; множество значений — интервал $(-1, 1)$; возрастает на области определения; непрерывна на области определения; нечетная.

Функция котангенс гиперболический: $y = \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$. Область определения — множество $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$; множество значений — $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$; убывает на промежутке $(-\infty, 0)$, возрастает на промежутке $(0, +\infty)$; непрерывна на области определения; нечетная.

Некоторые полезные соотношения, связанные с гиперболическими функциями (проверяются непосредственно):

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}; \quad 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}; \quad \operatorname{cth}^2 x - 1 = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x};$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x; \quad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x;$$

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x; \quad \operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y.$$

Обратные гиперболические функции.

Функция ареа-синус гиперболический: $y = \operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ — обратная к функции $x = \operatorname{sh} y$. Область определения — вся числовая ось; множество значений — вся числовая ось; возрастает и непрерывна на области определения; нечетная.

Функция ареа-косинус гиперболический: $y = \operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ — обратная к функции $x = \operatorname{ch} y$ на промежутке $[0, +\infty)$. Область определения — промежуток $[1, +\infty)$; множество значений — промежуток $[0, +\infty)$; возрастает и непрерывна на области определения.

Функция `ареа-тангенс гиперболический`: $y = \operatorname{arth} x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ — обратная к функции $x = \operatorname{th} y$. Область определения — интервал $(-1, 1)$; множество значений — вся числовая ось; возрастает и непрерывна на области определения; нечетная.

Функция `ареа-котангенс гиперболический`: $y = \operatorname{arcth} x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1}$ — обратная к функции $x = \operatorname{cth} y$. Область определения — множество $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$; множество значений — $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$; убывает на промежутках $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$; непрерывна на области определения; нечетная.

Определение 4. *Функции, которые могут быть получены из простейших элементарных функций путем применения арифметических операций и операции композиции в конечном числе, называются* ***элементарными****.*

Из определения элементарных функций, теоремы об арифметических операциях над непрерывными функциями и теоремы о непрерывности сложной функции сразу следует

Теорема 2. *Любая элементарная функция непрерывна на области своего определения.*

Замечательные пределы.

Докажем два полезных соотношения, связанных с элементарными функциями.

Теорема 3. (Первый замечательный предел).

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Доказательство. Покажем сначала, что $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$. Рассмотрим окружность единичного радиуса с центром в начале координат — точке O. Пусть A — точка пересечения окружности с осью Ox; точка B принадлежит первой координатной четверти и лежит на окружности так, что $\angle AOB = x$; точка C лежит на луче OB так, что $CA \perp OA$. Тогда площадь треугольника AOB равна $\dfrac{1}{2}\sin x$; площадь сектора AOB равна $\dfrac{1}{2}x$; площадь треугольника AOC равна $\dfrac{1}{2}\operatorname{tg} x$. Из геометрических соображений заключаем, что $\sin x \leqslant x \leqslant \operatorname{tg} x$, следовательно, $1 \leqslant \dfrac{x}{\sin x} \leqslant \dfrac{1}{\cos x}$. Отсюда получаем двойное неравенство

$$\cos x \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant 1.$$

Так как крайняя левая и крайняя правая части последнего неравенства стремятся к единице при $x \to 0+0$, то получаем, что $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Теперь утверждение теоремы следует из следующей цепочки соотношений:

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{t\to 0+0}\frac{\sin(-t)}{-t} = \lim_{t\to 0+0}\frac{\sin t}{t} = 1.$$

□

Теорема 4. (Второй замечательный предел).

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e.$$

Доказательство. 1) Пусть $\{x_n\}$ — последовательность вещественных чисел; $x_n\to+\infty$ при $n\to+\infty$. Тогда $[x_n]\leqslant x_n<[x_n]+1$, $[x_n]\to+\infty$ при $n\to+\infty$ ($[x_n]$ — целая часть x_n). Не ограничивая общности, можем считать, что $[x_n]>0$. Значит,

$$1+\frac{1}{[x_n]+1}\leqslant 1+\frac{1}{x_n}\leqslant 1+\frac{1}{[x_n]}$$

и

$$\left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]}\leqslant\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}\leqslant\left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]+1}.$$

Покажем теперь, что $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]}=e$ при любом выборе последовательности $\{x_n\}$. Действительно, выберем $\varepsilon>0$. Мы знаем, что $\lim\limits_{k\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k=e$. Значит, существует такой номер $K=K(\varepsilon)$, что $\left|\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k-e\right|<\varepsilon$ при всех $k\geqslant K$. Так как $x_n\to+\infty$ при $n\to+\infty$, то существует натуральное число N такое, что неравенство $[x_n]\geqslant K$ выполняется при всех $n\geqslant N$. Но это означает, что $\left|\left(1+\dfrac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]}-e\right|<\varepsilon$ при всех $n\geqslant N$, то есть что $\left(1+\dfrac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]}\to e$ при $n\to+\infty$. Отсюда получаем, что

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]+1}\cdot\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right)^{-1}=e\cdot 1=e,$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]+1}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]}\cdot\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)=e\cdot 1=e,$$

следовательно (по теореме о предельном переходе в неравенствах для последовательностей),

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}=e.$$

Согласно определению предела по Гейне, это означает, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$.

2) Пусть теперь x стремится к $-\infty$. Тогда

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^x=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{-x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{-x-1}\right)^{-x}=$$

$$=\{t=-x-1\}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\cdot\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)=e\cdot 1=e.$$

3) Наконец,

$$\lim_{x\to\pm 0}(1+x)^{1/x} = \{t = 1/x\} = \lim_{t\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e.$$

$\square$

Следствие.

$$\sin x \sim x, \quad \ln(1+x) \sim x, \quad e^x - 1 \sim x, \quad x \to 0.$$

Доказательство. Напомним, что $f(x) \sim g(x)$ при $x \to 0$, если $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Первая из эквивалентностей уже доказана (первый замечательный предел). Рассмотрим вторую:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\ln(1+x)^{1/x}\right) = \ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = \ln e = 1.$$

Отсюда получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \{t = e^x - 1\} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(t+1)} = e.$$

$\square$

Равномерная непрерывность функции.

Определение 5. *Функция $f(x)$ называется* ***равномерно непрерывной*** *на множестве A, если для любого вещественного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любой пары точек x', x'' множества A, для которых верно неравенство $|x' - x''| < \delta$, будет выполнено: $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.*

Замечание 1. *Если функция $f(x)$ равномерно непрерывна на множестве A, то она непрерывна в любой точке $x_0 \in A$: положим в определении равномерной непрерывности $x'' = x_0$, получим, что для любого вещественного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любой точки x' множества A, для которой верно неравенство $|x' - x_0| < \delta$, будет выполнено: $|f(x') - f(x_0)| < \varepsilon$. Это в точности определение непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0.*

Теорема 5. (Кантор). *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то она равномерно непрерывна на нем.*

Доказательство. Предположим, что $f(x)$ непрерывна, но не равномерно непрерывна на сегменте $[a, b]$. Тогда найдется такое вещественное $\varepsilon > 0$, что для любого вещественного $\delta > 0$ будет существовать пара точек $x', x'' \in [a, b]$, удовлетворяющих условию $|x' - x''| < \delta$, для которых будет выполняться неравенство $|f(x') - f(x'')| \geqslant \varepsilon$. Обозначим $\delta_n = \dfrac{1}{n}$ для любого натурального n. Согласно сказанному выше, найдется такое $\varepsilon > 0$, что для любого натурального n будет существовать пара точек $x'_n, x''_n \in [a,b]$ таких, что $|x'_n - x''_n| < \dfrac{1}{n}$, но $|f(x'_n) - f(x''_n)| \geqslant \varepsilon$.

Рассмотрим последовательность $\{x'_n\}$. Она ограничена (так как $a \leqslant x'_n \leqslant b \ \forall n \in \mathbb{N}$), следовательно, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x'_{k_n}\}$. Пусть $\lim\limits_{n\to+\infty} x'_{k_n} = \xi$, тогда $\xi \in [a,b]$. Рассмотрим теперь подпоследовательность $\{x''_{k_n}\}$ последовательности $\{x''_n\}$. Поскольку для любого натурального n выполняется неравенство $|x'_{k_n} - x''_{k_n}| < \dfrac{1}{k_n}$, то получаем, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x''_{k_n} = \xi$. Так как функция $f(x)$ непрерывна в точке ξ, то $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x'_{k_n}) = f(\xi)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x''_{k_n}) = f(\xi)$. Но по построению последовательностей $\{x'_n\}$, $\{x''_n\}$ должно выполняться неравенство: $|f(x'_{k_n}) - f(x''_{k_n})| \geqslant \varepsilon$, где ε — некоторое фиксированное число. Мы пришли к противоречию. Значит, наше предположение неверно, и функция $f(x)$ является равномерно непрерывной на сегменте $[a,b]$. $\square$

Пример 1. *1) Функция $y = \ln x$ не является равномерно непрерывной на интервале $(0,1)$, так как существует число $\varepsilon = \ln 2$ такое, что для любого натурального числа n найдутся точки $x'_n = \dfrac{1}{n}$, $x''_n = \dfrac{2}{n}$, удовлетворяющие условию $|x'_n - x''_n| = \dfrac{1}{n}$, для которых будет выполнено:*

$$|\ln x'_n - \ln x''_n| = \left|\ln\frac{1}{n} - \ln\frac{2}{n}\right| = \left|\ln\frac{1}{2}\right| = \ln 2 = \varepsilon.$$

2) Функция $y = x^2$ не является равномерно непрерывной на бесконечном промежутке $[1,+\infty)$, так как существует число $\varepsilon = 2$ такое, что для любого натурального числа n найдутся точки $x'_n = n + \dfrac{1}{n}$, $x''_n = n$, удовлетворяющие условию $|x'_n - x''_n| = \dfrac{1}{n}$, для которых будет выполнено:

$$\left|(x'_n)^2 - (x''_n)^2\right| = \left|\left(n + \frac{1}{n} - n\right)\left(n + \frac{1}{n} + n\right)\right| = \frac{1}{n}\left(2n + \frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n}\cdot 2n = 2 = \varepsilon.$$

Упражнение 1. *Привести пример функции, непрерывной, ограниченной, но не равномерно непрерывной на 1) интервале $(0,1)$; 2) полуоси $[1,+\infty)$.*